ACTIVIDADES de la página 9

a) *El cifrado de César*: empleado por Julio César para comunicarse con los legados de sus legiones. ¿En qué consiste? Codifica la célebre frase de César: «*Alea jacta est*».

Julio César cifraba su correspondencia mediante un algoritmo de sustitución de este tipo: cada letra del mensaje original era sustituida por la que seguía tres posiciones más adelante en el alfabeto: la letra A era sustituida por D, la B por E, la C por F, y así hasta la última letra.

El algoritmo de sustitución puede verse en la tabla. En la primera fila puede verse el **alfabeto original** y en la segunda fila el **alfabeto cifrado**.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

La frase **«*Alea jacta est*»** codificada se convierte en **DÑHD MDFWD HVW**.

b) *El atbash hebreo*: usado en el libro de Jeremías de la Biblia. Busca información sobre él y codifica el mensaje «*examen el día catorce*».

El cifrado se realizaba con las letras del alfabeto hebreo. Nosotros los vamos a realizar con las letras del alfabeto latino.

Se trata de otro algoritmo de sustitución que aparece en la tabla siguiente. Como en el cifrado de César, en la primera fila puede verse el **alfabeto original** y en la segunda fila el **alfabeto cifrado**.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P	O	N	M	L	K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A

El mensaje **«*examen el día catorce*»** codificado es **VCZNVM VO WRZ XZGLIXV**.

c) El cifrado de Polibio: ideado por el historiador griego Polibio, fue utilizado durante mucho tiempo. Encuentra su forma de proceder y codifica la frase «*Queremos fin guerra*».

Polibio colocó las letras del alfabeto en una tabla 5 x 5. El sistema de cifrado consistía en hacer corresponder a cada letra del alfabeto un par de letras que indicaban la fila y la columna, en la cual aquella se encontraba.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A	A	B	C	D	E
B	F	G	H	I, J	K
C	L	M	N, Ñ	O	P
D	Q	R	S	T	U
E	V	W	X	Y	Z

La frase **«*Queremos fin guerra*»** se codifica en la expresión:

"DADEAEDBAECBCDDC BABDCC BBDEAEDBDBAA".

En este caso la frase «***Queremos fin guerra***» quedaría codificada con la expresión:

"4145154215323443 212433 224515424211".

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I, J	K
3	L	M	N, Ñ	O	P
4	Q	R	S	T	U
5	V	W	X	Y	Z

d) *El cifrado Hill*: inventado por el matemático norteamericano Lester Hill en 1929. Utiliza matrices en el cifrado. Los pasos del procedimiento de cifrado están expuestos en las página 54 y 55 de este libro de texto.

Usando el código numérico:

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**
17	**7**	**21**	**15**	**27**	**8**	**10**	**20**	**3**	**26**	**19**	**4**	**11**	**28**

Ñ	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**—**
14	**5**	**18**	**9**	**23**	**1**	**12**	**25**	**6**	**16**	**13**	**22**	**2**	**24**

Codifica el mensaje «*En el mismo lugar*», utilizando la matriz A de cifrado, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El mensaje anterior, según el código numérico se transforma es:

Mensaje	E N _	E L _	M I S	M O _	L U G	A R _
Mensaje con código numérico	27 28 24	27 4 24	11 3 1	11 5 24	4 25 10	17 23 24

Para enviar de forma cifrada el mensaje anterior se toma la secuencia numérica de la segunda fila de la tabla y se multiplica, tomando los números de tres en tres por la matriz de cifrado:

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 28 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 55 \\ 76 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 3 \\ 27 \\ 20 \end{pmatrix}$

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 4 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 31 \\ 52 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 24 \end{pmatrix}$

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$

(IV) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 16 \\ 53 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$

(V) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 29 \\ 45 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}$

(VI) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 40 \\ 71 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

Mensaje codificado con código numérico	3 27 20	3 3 24	10 14 5	15 16 25	22 1 17	21 12 15
Mensaje codificado	I E H	I I _	G Ñ O	D W U	Y S A	C T D

El mensaje codificado será: IEHII_GÑODWUYSACTD.

Nota: Si deseamos descodificar el mensaje codificado utilizaremos la matriz inversa de A, es decir, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y procedemos como hemos hecho en la codificación.

Ofrecemos bibliográfica donde encontrar información sobre las cuestiones expuestas, además en internet puede localizarse, sin dificultad, trabajos realizados sobre los aspectos reseñados.

GÓMEZ URGELLÉS, JOAN. (2010) *Matemáticos, espías y piratas informáticos (Codificación y criptografía)*. RBA.

GONZÁLES VASCO, Mª ISABEL. (2018) *Las matemáticas de la criptología (Secretos demostrables y demostraciones secretas)*. Los libros de la catarata.

CUESTIONES INICIALES página 10

1. Los electrodomésticos que vende una cadena en una gran ciudad los tiene en cuatro comercios C_1, C_2, C_3 y C_4. Vende tres marcas de televisores TV_1, TV_2 y TV_3. En un momento determinado, el comercio C_1 tiene 20 televisores de la marca TV_1, 18 del tipo TV_2 y 16 del TV_3. El comercio C_2, 22, 16 y 38, respectivamente. De igual forma, el comercio C_3, 30, 40 y 10. Por último, las unidades de C_4 son 15, 25 y 20. Expresa, de forma ordenada, los datos anteriores en una tabla.

En las filas de la tabla se han colocado las marcas de los televisores y en las columnas los comercios, obteniéndosela tabla:

	C_1	C_2	C_3	C_4
TV_1	20	22	30	15
TV_2	18	16	40	25
TV_3	16	38	10	20

2. Encuentra las soluciones de los sistemas siguientes por el método de Gauss, expresándolos en forma matricial:

a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - 5y = 19 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x + 2y - 3z = 11 \\ 2x - 5y + z = -14 \\ 3x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$

La resolución de los sistemas puede expresarse en la forma siguiente:

a) En la primera matriz realizamos la operación elemental por filas: multiplicamos por 2 la primera fila y por 3 la segunda, restando los productos anteriores y colocando los resultados en la segunda fila ($2F_1 - 3F_2 \rightarrow F_2$), y obtenemos la segunda matriz.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 19 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 17 & -51 \end{pmatrix}$$

La segunda matriz proporciona la solución: x = 2, y = – 3.

b) En la primera matriz realizamos las operaciones elementales por filas: $2F_1 + F_2 \rightarrow F_2$ y $3F_1 + F_3 \rightarrow F_3$ y obtenemos la segunda matriz. En esta matriz realizamos la operación elemental por filas $9F_2 + F_3 \rightarrow F_3$ y obtenemos la tercera matriz.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 2 & -5 & 1 & -14 \\ 3 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 9 & -11 & 40 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -56 & 112 \end{pmatrix}$$

La tercera matriz proporciona la solución: x = – 1, y = 2, z = – 2.

ACTIVIDADES página 12

1. Identifica con la notación a_{ij} los elementos de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Los elementos de la matriz son $a_{11} = 0$; $a_{12} = -1$; $a_{13} = 3$; $a_{21} = -2$; $a_{22} = 1$ y $a_{23} = -4$.

ACTIVIDADES página 15

2. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) 3(A – B) – 6C **b) 2A –3 (B + C)**

a) 3 (A – B) – 6 C = $3\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) 2A –3(B + C) = $2\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

3. Calcula x, y, z en la expresión: $\mathbf{4} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-7} \end{pmatrix} = \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{y} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} - \mathbf{3} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{z} \end{pmatrix}$.

Operando e igualando las matrices resultantes, obtenemos: x = 4, y = 3 y z = 8.

ACTIVIDADES página 17

4. Calcula $A^2 - 2A - I$ siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Hallamos A^2: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

Realizamos la operación: $A^2 - 2A - I = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$

5. Sean las matrices $A_{4\times 3}$, $B_{4\times 2}$ y $C_{2\times 3}$. Determina la dimensión de las siguientes matrices:

a) $A^t \cdot B$ b) $A \cdot C^t$ c) $B \cdot C$ d) $C \cdot A^t$ e) $B \cdot C + A$ f) $B^t \cdot A - C$

Las dimensiones de las matrices resultantes de las operaciones son:

a) $A^t \cdot B$: (3 x 4) · (4 x 2) $\Rightarrow$ **(3 x 2)**

b) $A \cdot C^t$: (4 x 3) · (3 x 2) $\Rightarrow$ **(4 x 2)**

c) $B \cdot C$: (4 x 2) · (2 x 3) $\Rightarrow$ **(4 x 3)**

d) $C \cdot A^t$: (2 x 3) · (3 x 4) $\Rightarrow$ **(2 x 4)**

e) $B \cdot C + A$: (4 x 2) · (2 x 3) + (4 x 3) $\Rightarrow$ (4 x 3) + (4 x 3) $\Rightarrow$ **(4 x 3)**

f) $B^t \cdot A - C$: (2 x 4) · (4 x 3) + (2 x 3) $\Rightarrow$ (2 x 3)+ (2 x 3) $\Rightarrow$ **(2 x 3)**

6. Calcula el valor de x e y para que las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$ conmuten.

Se cumplirá:

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+3x & 2+3y \\ 3+x & 6+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ x+3y & 3x+y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+3x = 7 \\ 2+3y = 5 \\ 3+x = x+3y \\ 6+y = 3x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

7. Halla el valor de x en la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ para que se cumpla la igualdad $A^2 = 4I$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

Operamos en la igualdad $A^2 = 4I$:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -2x+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ -2x+4=0 \\ -2+x=0 \end{cases} \Rightarrow \{x = 2$$

El valor de x buscado es x = 2.

ACTIVIDADES página 18

8. Determina las matrices 2 x 2 de la forma $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{x}\\ \mathbf{0} & \mathbf{y}\end{pmatrix}$ tales que $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}^t=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$, siendo $\mathbf{M}^t$ la matriz traspuesta de M.

Operando obtenemos:

$$M\cdot M^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1+x^2 & xy\\ xy & y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}1+x^2=1\\ xy=0\\ y^2=4\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=0\\ y=\pm 2\end{cases}$$

La matriz M puede ser $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ o $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

9. Dadas las matrices $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ y $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$, comprueba que:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

a) $A+B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $(A+B)^t=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$$A^t+B^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 12 & 0\end{pmatrix}$ y $(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}8 & 12\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

$$B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 12\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES página 19

10. Para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y} \end{pmatrix}$**, encuentra las matrices que cumplan** $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -\mathbf{2} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$**.**

Operamos e igualamos las matrices resultantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2 = 2 \\ xy = -2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1,\ x = 1 \\ x \cdot y = -2 \\ y = -2,\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1,\ y = 2 \\ x = 1,\ y = 2 \end{cases}$$

i) Para x = – 1, y = 2 la matriz es $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ii) Para x = 1, y = – 2 la matriz es $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

ACTIVIDADES página 21

11. Utilizando el método de Gauss–Jordan calcula las matrices inversas de:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{4} & \mathbf{9}\end{pmatrix},\ \mathbf{y}\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{1}\\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix},$$

● Calculamos la matriz inversa de A utilizando las operaciones elementales por filas y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 9 & 0 & 1\end{array}\right), \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 9 & -2\\ 0 & 1 & -4 & 1\end{array}\right)$$

En (1) hemos realizado $F_2 \to F_2 - 4F_1$. En (2) hemos realizado $F_1 \to F_1 - 2F_2$.

La matriz inversa de A es $A^{-1}=\begin{pmatrix}9 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$.

● Calculamos la matriz inversa de B utilizando las operaciones elementales por filas y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right), \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

En (1) hemos realizado $F_3 \to F_3 - F_1$. En (2) hemos realizado $F_3 \to F_3 + F_2$. En (3) hemos realizado $F_2 \to F_2 + F_3$. En (4) hemos realizado $F_1 \to F_1 + F_3$.

La matriz inversa de B es $B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

12. Se consideran las matrices $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{8} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & -\mathbf{1}\\ -\mathbf{8} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$,

a) Comprueba que B es la matriz inversa de A.

b) Calcula la matriz X tal que A · X = B.

a) La matriz inversa A^{-1} de la matriz A cumple $A \cdot A^{-1} = I$. Veamos que A · B = I:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ -8 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^{-1} = B$.

b) Operamos en la ecuación AX = B y despejamos la matriz X:

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = B \cdot B = B^2$$

Hallamos la matriz X: $X = B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$

ACTIVIDADES página 23

13. Dada la matriz A, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **calcula:**

a) Su rango.

b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes.

c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes.

a) El rango de la matriz es 3 al ser el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

El mismo resultado podemos obtenerlo con las operaciones elementales por filas:

$$rango\ (A) = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

b) Existe una columna combinación lineal de las otras, por ejemplo, la columna segunda podemos ponerla en combinación lineal de las otras tres:

$$(0, 3, 6) = 0 \cdot (1, 1, 1) + 3 \cdot (0, 3, 6) + 0 \cdot (1, 4, 4)$$

c) En este caso no existe una fila combinación lineal de las restantes ya que al ser el rango 3 las tres filas son linealmente independientes.

14. Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro m.

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{m-1} & \mathbf{2m} \\ \mathbf{m+1} & \mathbf{m} \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{m} \\ \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$

a) Haciendo ceros con las operaciones elementales entre filas, obtenemos:

$$rango\ \ A = rango \begin{pmatrix} m-1 & 2m \\ m+1 & m \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} m-1 & 2m \\ 0 & m \cdot (m+3) \end{pmatrix}$$

Estudio:
● Si m ≠ 0 y m ≠ 3, el rango de A es 2.

● Si m = 0, el rango de $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es 1.

● Si m = 3, el rango de $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es 1.

b) Haciendo ceros con las operaciones elementales entre filas, obtenemos:

$$rango\ B = rango \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 2 & m \\ 9 & 6 & 3 & -6 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & m+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudio:

● Si m ≠ – 4, el rango de B es 2.

● Si m = 4, el rango de $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es 1.

ACTIVIDADES página 29

1. Cuadrados de números. Si un número acaba en 2, ¿cuál es la última cifra de su cuadrado? Y si acabase en otra cifra, ¿cuál es la última cifra de su cuadrado?

Calcula los cuadrados de 15, 25, 35, 45 y 55, ¿cuáles son sus dos últimas cifras? ¿Podrías explicar una regla razonada para calcular las cifras restantes del cuadrado, sin efectuar la multiplicación?

Calcula los cuadrados de 11, 21, 31, 41 y 51. Da una regla que te permita calcularlos a partir de los cuadrados de los números 10, 20, 30, 40 y 50.

a) Si un número acaba en 2, su cuadrado acaba en 4.

En la tabla pueden verse todas las terminaciones:

Si un número acaba en	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Su cuadrado acaba en	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

b) Calculamos los cuadrados pedidos y alguno más del mismo tipo:

$15^2 = 225$ $25^2 = 625$ $35^2 = 1225$ $45^2 = 2025$

$55^2 = 3025$ $65^2 = 4225$ $75^2 = 5625$ $85^2 = 7225$

$95^2 = 9025$ $105^2 = 11025$

Observamos que todos acaban en 25 y las otras cifras son el resultado de multiplicar el valor de las decenas por este número más 1.

Para 15^2: $1 \cdot (1 + 1) = 2$; para 25^2: $2 \cdot (2 + 1) = 6$; para 35^2: $3 \cdot (3 + 1)\ 12$; …

Teniendo en cuenta la expresión polinómica de un número en el sistema de numeración decimal, se obtiene:

$$\mathbf{(a5)^2} = (10a + 5)^2 = (10a)^2 + 2 \cdot 10a \cdot 5 + 5^2 =$$

$$= 100a^2 + 100a + 25 = 100(a^2 + a) + 25 = \mathbf{a \cdot (a + 1) \cdot 100 + 25}$$

c) Como en el caso anterior calculamos los cuadrados:

$11^2 = 121$ $21^2 = 441$ $31^2 = 961$ $41^2 = 1681$…

Teniendo en cuenta la expresión polinómica:

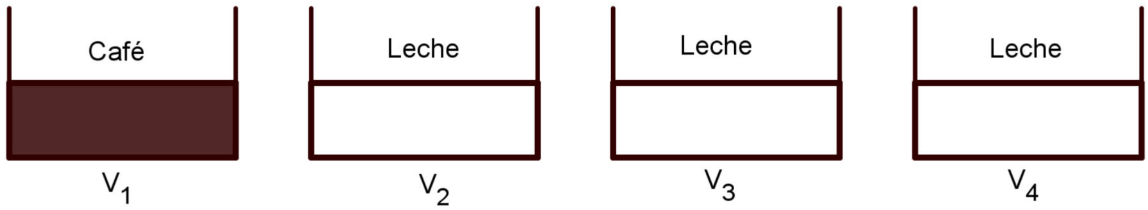
$$\mathbf{(a1)^2} = (10a + 1)^2 = (10a)^2 + 2 \cdot 10a \cdot 1 + 1^2 =$$

$$= 100a^2 + 20a + 1 = \mathbf{a^2 \cdot\ 100 + 2a \cdot 10 + 1}$$

La regla sería: **El cuadrado de a por 100, el doble de a por 10, más 1.**

2. Tazones de café con leche. Cuatro tazones contienen el mismo volumen de líquido. El primer tazón contiene café solo y los otros tres sólo contienen leche. Se vierte la cuarta parte del contenido del primer tazón al segundo. Se hace la mezcla homogénea y, a continuación, se vierte la cuarta parte del contenido del segundo tazón al tercero. Se hace la mezcla homogénea y se vierte la cuarta parte del contenido en el último tazón. ¿Qué relación hay entre el volumen del café y de la leche que hay en el cuarto tazón?

Dibujamos los tazones con sus contenidos:



Los volúmenes de los distintos tazones en las distintas acciones aparecen en la tabla.

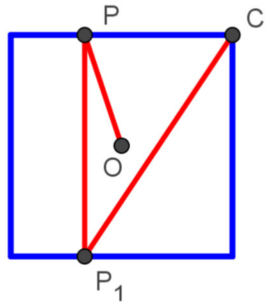
Estado	Tazón de café	Tazón de leche (1)	Tazón de leche (2)	Tazón de leche (3)
Inicio	V_1	V_2	V_3	V_4
Primer trasvase		$V_2+\frac{1}{4}V_1$	V_3	V_4
Segundo trasvase			$V_3+\frac{1}{4}\left(V_2+\frac{1}{4}V_1\right)$	V_4
Tercer trasvase				$V_4+\frac{1}{4}\left(V_3+\frac{1}{4}\left(V_2+\frac{1}{4}V_1\right)\right)$

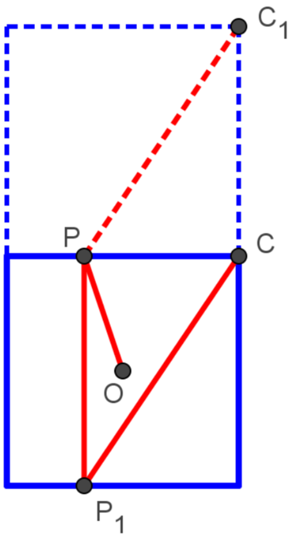
Como $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$, el contenido final del cuarto tazón es:

$$V_F=\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}\right)V=\frac{\frac{1}{4^4}-1}{\frac{1}{4}-1}V=\frac{1-4^4}{4^3-4^4}V$$

El contenido final de café del cuarto tazón es $C_F=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}C\right)\right)$; pero, como C = V, resulta que $C_F=\frac{1}{4^3}V$. La relación, r, pedida es, por tanto, $r=\dfrac{\frac{1}{4^3}V}{\frac{1-4^4}{4^3-4^4}V-\frac{1}{4^3}V}=\frac{1}{84}$.

3. Longitud mínima. Dado un cuadrado ABCD de centro O, determina la posición del punto P para que la longitud $\overline{OP} + \overline{PP_1} + \overline{P_1C}$ sea mínima.





Como el segmento $\overline{PP_1}$ mide la longitud del lado del cuadrado, es constante, entonces la longitud que tiene que ser mínima es $\overline{OP} + \overline{P_1C}$.

Dibujamos en el cuadrado del enunciado un cuadrado auxiliar punteado en la parte superior.

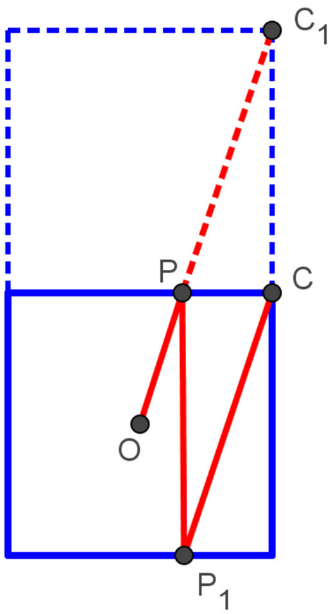
En dicha figura se verifica:

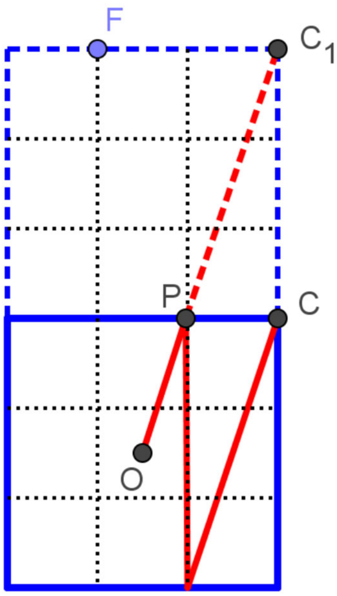
$$\overline{OP} + \overline{P_1C} = \overline{OP} + \overline{PC_1}$$

y esta longitud será mínima cuando los segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{PC_1}$ estén alineados.

En la figura inferior se muestra como determinar la posición del punto P buscado.

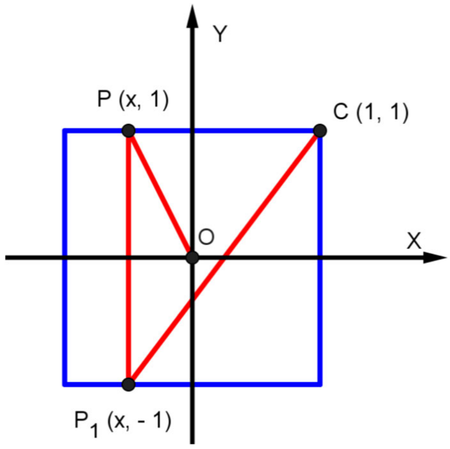
Resulta que el punto P es el origen del segmento $\overline{PC}$, siendo este la tercera parte del lado del cuadrado.





Resolución analítica:

Dibujamos un sistema cartesiano tomando como origen de coordenadas el centro de un cuadrado de lado 2, es decir, el punto O (0, 0).



Las coordenadas de los puntos del enunciado son:

C (1, 1), P (x, 1) y P_1 (x, – 1)

Las longitudes de los segmentos $\overline{OP}$, $\overline{PP_1}$ y $\overline{P_1C}$ son:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + 1} \qquad \overline{PP_1} = \sqrt{(x - x)^2 + [1 - (-1)]^2} = 2$$

$$\overline{P_1C} = \sqrt{(x - 1)^2 + [1 - (-1)]^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

La función a optimizar es $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

Los posibles máximos y mínimos son los valores que anulan la primera derivada de f (x), que es:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 5}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

Anulamos la primera derivada y obtenemos:

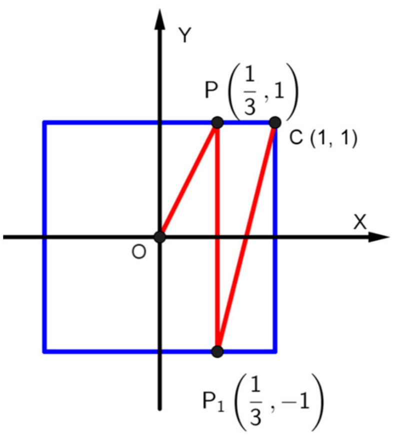
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 5} + (x - 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = 0$$

Operamos y resolvemos la ecuación resultante.

$$x \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 5} = (1 - x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot (x^2 - 2x + 5) = (1 - x)^2 \cdot (x^2 + 1) \quad \Rightarrow$$

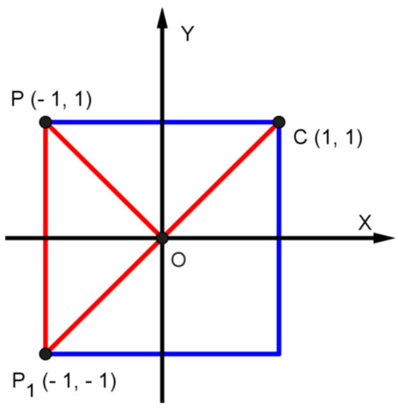
$$\Rightarrow \quad x^4 - 2x^3 + 5x^2 = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$



Para $x_1 = \dfrac{1}{3}$, las coordenadas del punto P son $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ y la longitud buscada es mínima (ver primer dibujo).

Para x_2 = – 1, las coordenadas del punto P_1 son $(-1, -1)$ y la longitud buscada es máxima (ver segundo dibujo).



ACTIVIDADES página 32

1. A cuatro compañeros, A, B, C, D, de segundo de bachillerato, se les pide que respondan a la pregunta: “¿Crees que alguno de vosotros aprobará este curso? Di quiénes”.

Las respuestas son: A opina que B y D; B opina que A y el mismo; C opina que A, B y D; D opina que el mismo. Expresa este enunciado en una matriz.

Expresamos la información del enunciado en una tabla, poniendo un 1 en el caso que un individuo opine de otro que aprobará el curso y un 0 en caso contrario.

	A	**B**	**C**	**D**
A	0	1	0	1
B	1	1	0	0
C	1	1	0	1
D	0	0	0	1

Los valores de la tabla dan lugar a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Halla las matrices A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) y C = (c_{ij}), de dimensiones 3x2, 3x3 y 3 x 4, cuyos elementos sean, respectivamente:

a) $a_{ij} = (2i - j)^2$ **b)** $b_{ij} = i^j$ **c)** $c_{ij} = (i + j)^{i -}$

Las matrices pedidas son:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \\ 25 & 16 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{16} & \frac{1}{125} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{36} \\ 16 & 5 & 1 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

3. Escribe dos matrices diagonales de orden 3 tal que la suma de todos sus elementos sea 6.

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que todos los elementos no situados en la diagonal principal son ceros. Matrices que cumplan el enunciado pueden ser:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ o } D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Encuentra todas las matrices de dimensión 2x2 tales que la suma de los elementos de cada fila sea igual a 1 y la suma de los elementos de la primera columna sea igual a cero.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si los elementos de cada fila deben sumar 1 se cumplirá: $\begin{cases} a+b=1 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1-a \\ d=1-c \end{cases}$ y la matriz será de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ c & 1-c \end{pmatrix}$.

Si la suma de los elementos de la primera columna deben sumar 0, se cumplirá: a + c = 0, es decir, c = – a. Sustituyendo en la matriz, obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$$, siendo a un número real cualquiera.

5. Calcula a, b, c y d para que se cumpla $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{3a} \\ \mathbf{d} & \mathbf{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{a+b} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{c} \end{pmatrix} = \mathbf{2}\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$**.**

Operamos e igualamos los elementos de las matrices resultantes:

$$\begin{pmatrix} a+b-2 & 3a+4 \\ d+5 & c+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b-2=2a \\ 3a+4=2b \\ d+5=2c \\ c+7=2d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: a = 0, b = 2, c = 17/3 y d = 19/3.

6. Una empresa de aceite de oliva elabora tres calidades: normal, extra y virgen extra y posee tres marcas X, Y, Z, distribuyendo su producción en cuatro almacenes. Los miles de litros almacenados en el primer almacén vienen expresados en la matriz:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{22} & \mathbf{46} & \mathbf{80} \\ \mathbf{36} & \mathbf{58} & \mathbf{88} \\ \mathbf{48} & \mathbf{66} & \mathbf{92} \end{pmatrix}$$

El segundo almacén tiene el doble que el primero, el tercero la mitad y el cuarto el triple. ¿Qué volumen de producción de aceite tiene en cada uno de los almacenes, y en total, de cada calidad y de cada una de las marcas?

Las matrices A_i, con i = 1, 2, 3, 4, muestran el volumen de aceite de cada uno de los almacenes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 22 & 46 & 80 \\ 36 & 58 & 88 \\ 48 & 66 & 92 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 44 & 92 & 160 \\ 72 & 116 & 176 \\ 96 & 132 & 184 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 11 & 23 & 40 \\ 18 & 29 & 44 \\ 24 & 33 & 46 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 66 & 138 & 240 \\ 108 & 174 & 264 \\ 144 & 198 & 276 \end{pmatrix}$$

El volumen total de aceite almacenado de cada calidad y de cada una de las marcas es:

$$T = \begin{pmatrix} 143 & 299 & 520 \\ 234 & 377 & 572 \\ 312 & 429 & 598 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las matrices: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; calcula:

a) A + B **b) A – B + C** **c) 2A + B – 3C** **d) AB – AC** **e) 2AB – 3AC + 4BC**

Los resultados de las operaciones son:

a) $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $2A + B - 3C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

d) $AB - AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $2AB - 3AC + 4BC = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -12 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 & 88 \\ -32 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 84 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}$

8. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula el valor de x para que se cumpla A + B + C^2 = 3I, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Hallamos C^2: $C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Operamos A + B + C^2 = 3I:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x-2 \\ x-2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

El valor de x es 2.

9. Sean las matrices: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. **De los siguientes productos, explica razonadamente cuáles pueden realizarse y cuáles no:**

A · B **A · C** **A · D** **C · D**

Las dimensiones de las matrices del enunciado son: A_{2x3}, B_{3x2}, C_{3x1} y D_{1x3}. Analizamos cuáles de los productos pueden realizarse y la dimensión de la matriz resultante:

– El producto $A_{2x3} \cdot B_{3x2}$ puede realizarse ya que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B y la matriz resultante M_1 = AB tiene dimensión 2x2.

– El producto $A_{2x3} \cdot C_{3x1}$ puede realizarse ya que el número de columnas de A coincide con el número de filas de C y la matriz resultante M_2 = AC tiene dimensión 2x1.

– El producto $A_{2x3} \cdot D_{1x3}$ no puede realizarse ya que el número de columnas de A no coincide con el número de filas de D.

– El producto $C_{3x1} \cdot D_{1x3}$ puede realizarse ya que el número de columnas de C coincide con el número de filas de D y la matriz resultante M_3 = CD tiene dimensión 3x3.

10. Calcula los productos posibles entre las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los productos posibles son:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 16 & 9 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 3 \\ 5 & -13 & 18 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 5 \\ -4 & 12 & 7 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES página 33

11. Encuentra, en cada caso, la matriz A que cumpla:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2A$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2A$

Las matrices buscadas son:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -6 & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$

12. Obtén las matrices A y B que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

a) $\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3A - 5B = \begin{pmatrix} 23 & 21 & 16 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \\ -A + 3B = \begin{pmatrix} -13 & -11 & -8 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

Resolviendo los sistemas por reducción obtenemos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. Halla, en cada caso, todas las matrices que conmuten con:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de dimensión 2x2 cualquiera. En cada caso se cumplirá:

a) $A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a-2c & b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-2b \\ c+d & c-2d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=a+b \\ a-2c=c+d \\ b+d=a-2b \\ b-2d=c-2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b \\ d=a-3b \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-3b \end{pmatrix} \text{con } a, b \in R.$$

b) B · X = X · B $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=a \\ b=b \\ c+d=a+c \\ d=b+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=a \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \text{con } a, c \in R.$$

c) C · X = X · C $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ c-d & 2c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2c=a-b \\ b+2d=2a \\ -a=c-d \\ -b=2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=d-c \\ b=-2c \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} d-c & -2c \\ c & d \end{pmatrix} \text{con } c, d \in R.$$

14. Determina todas las matrices $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$ que verifican $\mathbf{M^2 = 2M}$.

Para $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ se tiene que: $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$ y $2M = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$

La igualdad de las matrices anteriores nos da el sistema: $\begin{cases} a^2+b^2=2a \\ 2ab=2b \end{cases}$.

En la segunda ecuación se obtiene a = 1 o b = 0. Estos valores llevados a la primera ecuación nos proporcionan cuatro soluciones:

i) a = 1, b = 1 ii) a = 1, b = – 1 iii) a = 0, b = 0 iv) a = 2, b = 0

Las cuatro matrices solución son, respectivamente:

i) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ iv) $M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

15. Con las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula A – A^t + I.

Operando:

$$A - A^t + I = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Para las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades de la trasposición de matrices:

a) $\left(A^t\right)^t$ **= A** **b)** $(A+B)^t = A^t + B^t$ **c)** $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ **d)** $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

En cada apartado obtenemos:

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\left(A^t\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ = A

b) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $(A+B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ 4k & 0 \end{pmatrix}$ y $(k \cdot A)^t = \begin{pmatrix} k & 4k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

$$k \cdot A^t = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 4k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ y $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

17. Para las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{D} = (\mathbf{2} \quad \mathbf{-1} \quad \mathbf{3})$, **efectúa las siguientes operaciones:**

a) $A^t \cdot B$ **b)** $C^t \cdot B$ **c)** $D \cdot D^t$ **d)** $D^t \cdot D$

Los resultados de los productos son:

a) $A^t \cdot B = (2 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (8 \quad -1)$

b) $C^t \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 0 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$

c) $D \cdot D^t = (2 \quad -1 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (14)$

d) $D^t \cdot D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad -1 \quad 3) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

18. Descompón las matrices dadas en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **c)** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **d)** $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

La descomposición de la matriz M es M = S + H, siendo S la matriz simétrica, $S = \dfrac{M + M^t}{2}$ y H la matriz antisimétrica, $H = \dfrac{M - M^t}{2}$.

En cada caso se obtiene:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

19. Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Sea A una matriz cuadrada, demuestra que A + A^t es simétrica.

b) Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica.

Las respuestas quedan:

a) Se tiene: $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$, por tanto, la matriz $(A + A^t)$ es simétrica pues coincide con su traspuesta.

b) Una matriz A es antisimétrica si $A^t = -A$.

Veamos cómo son las potencias sucesivas:

$(A^2)^t = (A \cdot A)^t = A^t \cdot A^t = (-A) \cdot (-A) = A^2$, luego A^2 es simétrica.

$(A^3)^t = (A^2 \cdot A)^t = A^t \cdot (A^2)^t = (-A) \cdot A^2 = -A^3$, luego A^3 es antisimétrica.

Por tanto, las potencias pares son matrices simétricas y las potencias impares son antisimétricas.

20. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de n $\in$ N?

a) Operamos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La expresión de la matriz A^n es $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Veamos que es cierto por el método de inducción:

● Es cierto para n = 1 ya que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

● Supongamos que se cumple para n = h, es decir, $A^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2h \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, veamos que se cumple para n = h + 1:

$$A^{h+1} = A^h \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2h \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2h+2 \\ 0 & 1 & h+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(h+1) \\ 0 & 1 & h+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21. En una academia de idiomas hay tres niveles de inglés para obtener los títulos de Cambridge: First, Advanced y Proficiency. Para First hay 7 estudiantes en el grupo de lunes y miércoles (G1), 8 en el grupo de martes y jueves (G2) y 4 en el intensivo de los sábados (G3). En Advanced hay 8 estudiantes en G1, 9 en G2 y 4 en G3. En el nivel de Proficiency hay 7 estudiantes en G1, 5 en G2 y 7 en G3.
Cada estudiante de First paga 110€ mensuales, 115€ los estudiantes de Advanced y 120€ los de Proficiency.
Escribe una matriz E que represente los estudiantes de la academia por niveles de inglés; y otra, P, con los precios mensuales por niveles.
¿Cuánto ganará mensualmente la academia en cada turno horario?

La matriz con los estudiantes de los distintos niveles es $E = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ y la matriz con los precios mensuales por niveles es $P = \begin{pmatrix} 110 \\ 115 \\ 120 \end{pmatrix}$.

Las ganancias mensuales, en euros, de la academia en cada turno horario son:

$$E \cdot P = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 115 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2530 \\ 2515 \\ 1740 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES página 34

22. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$**, calcula** $\mathbf{A^{97}}$ **y** $\mathbf{B^{59}}$**.**

En cada uno de los dos casos calculamos las potencias sucesivas de A y B.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$

$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 - (-I) = I$

$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = -I$

etcétera.

Observamos que las potencias de la matriz A se repiten de cuatro en cuatro. Así:

$A^{97} = A^{4 \cdot 24 + 1} = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = I \cdot A = A$

Calculando las potencias sucesivas de $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos que:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos continuar y observar que las potencias pares siguen una ley de recurrencia y las impares otra. Es decir:

Si n es par: $B^n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$ y si n es impar: $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{\frac{n+1}{2}} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $B^{59} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{30} \\ 2^{29} & 0 \end{pmatrix}$

23. Calcula A^n, para $n \in$ N, siendo A las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Quedan del siguiente modo:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

b) Si $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -sen\ n\alpha \\ sen\ n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{cases} I \ si\ n\ es\ par \\ A\ si\ n\ es\ impar \end{cases}$

24. Tres artesanas, Ana Berta y Carla trabajan para una marca de joyería. Elaboran conjuntos de anillos, pendientes y colgantes. Por cada conjunto realizado en oro les pagan 600 €, si es en plata 500 € y si es en acero 400 €. Las matrices N y D muestran sus producciones en los meses de noviembre y diciembre. La matriz P muestra el pago por unidad elaborada.

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Oro} & \text{Plata} & \text{Acero} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Oro} & \text{Plata} & \text{Acero} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Determina las siguientes matrices y explica qué representan:

a) N · S **b) D · S** **c) N + D** **d) (N + D) · S**

Operamos las matrices y obtenemos:

a) $N \cdot S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5300 \\ 5400 \\ 4800 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que han ganado cada una de las tres artesanas en el mes de noviembre.

b) $D \cdot S = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5600 \\ 6000 \\ 6200 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que han ganado cada una de las tres artesanas en el mes de diciembre.

c) $N + D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 8 & 2 & 14 \\ 6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

La matriz muestra la producción realizada durante los meses de noviembre y diciembre.

d) $(N + D) \cdot S = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 8 & 2 & 14 \\ 6 & 6 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10900 \\ 11400 \\ 11000 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que han ganado cada una de las tres artesanas en los meses de noviembre y diciembre.

25. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-11} & \mathbf{0} & \mathbf{11} \end{pmatrix}$

a) Realizando la operación elemental $3F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

b) Realizando las operaciones elementales $F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2$, $F_3 + F_1 \rightarrow F_3$ y $F_3 + F_2 \rightarrow F_3$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Realizando las operaciones elementales $F_2 + F_1 \rightarrow F_2$, $F_3 + 4F_1 \rightarrow F_3$ y $3F_2 - 2F_3 \rightarrow F_3$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

d) Realizando las operaciones elementales $F_2 - 2F_1 \to F_2$, $F_3 + F_1 \to F_3$ $F_4 + 2F_4 + 2F_1 \to F_4$, $F_4 + 3F_2 \to F_4$ y $2F_3 + F_4 \to F_4$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -11 & 0 & 11 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -15 & 2 & 17 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

26. Halla las matrices inversas de las siguientes matrices haciendo uso de la definición de matriz inversa:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ **c)** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$ **d)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

a) Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se cumplirá $A \cdot A^{-1} = I$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 5c = 1 \\ -a + 3c = 0 \\ 2b - 5d = 0 \\ -b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos:

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ c) No existe C^{-1} d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

27. Calcula las matrices inversas de las matrices que siguen por el método de Gauss–Jordan:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **c)** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Utilizando el método de Gauss–Jordan obtenemos:

a) Realizamos las siguientes operaciones elementales por filas: $F_2 \to 2F_1 + F_2$; $F_2 \to 1/3\, F_2$ y $F_1 \to F_1 - F_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) Realizamos las siguientes operaciones elementales por filas: $F_2 \rightarrow F_1 - F_2$; $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$; $F_2 \rightarrow F_2 + F_3$ y $F_1 \rightarrow F_1 - F_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de B es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos que la matriz inversa de C es:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

28. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y solución del sistema: $\begin{cases} \mathbf{X}^{-1} + \mathbf{Y} = \mathbf{A} \\ \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{Y} = \mathbf{A}^t \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos $X^{-1} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Restando ambas ecuaciones obtenemos $Y = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Hallamos la inversa de la matriz X^{-1} y esta será la matriz X:

$$X = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

29. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a+4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, calcula los valores de a para que la inversa de A sea $\frac{1}{4}A$.

Teniendo en cuenta que la matriz inversa de A, A^{-1} cumple la igualdad $A \cdot A^{-1} = I$; tenemos:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad A \cdot \left(\frac{1}{4}A\right) = I \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}A \cdot A = I \quad \Rightarrow \quad A^2 = 4I$$

Calculamos A^2: $A^2 = \begin{pmatrix} a & a+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + a + 4 & a^2 + 5a + 4 \\ a+1 & a+5 \end{pmatrix}$

Identificamos los elementos de $A^2 = 4I$ y obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a^2 + a + 4 = 4 & \Rightarrow \quad a = 0,\ a = -1 \\ a^2 + 5a + 4 = 0 & \Rightarrow \quad a = -1,\ a = -4 \\ a + 1 = 0 & \Rightarrow \quad a = -1 \\ a + 5 = 4 & \Rightarrow \quad a = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \{a = -1$$

30. Obtén razonadamente la matriz M que admite inversa y verifica la igualdad M · M = M.

Se cumplirá:

$$M \cdot M = M \quad \Rightarrow \quad M \cdot M - M = O \quad \Rightarrow \quad M \cdot (M - I) = O \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M = O \\ M = I \end{cases}$$

Como M admite inversa, M debe ser la matriz identidad.

ACTIVIDADES página 35

31. Calcula X tal que X – B² = A · B, siendo: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**.**

En la ecuación tenemos que X = A · B + B²:

Calculamos las matrices:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

32. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{b} \\ \mathbf{a} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

a) Operamos en ambos lados de la igualdad y obtenemos: $\begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$.

Igualando los elementos de las matrices se tiene el sistema, cuya solución es:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5/4 \\ y = -7/4 \end{cases}$$

b) Operamos las matrices y obtenemos: $\begin{pmatrix} 1 + b^2 & a + bc \\ a + bc & a^2 + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Igualando los elementos de las matrices se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 1+b^2=5 \\ a+bc=0 \\ a^2+c^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\pm 2 \\ a+bc=0 \\ a^2+c^2=5 \end{cases}$$

Para los dos valores de b se obtiene cuatro soluciones:

i) a = – 2, b = 2, c = 1 ii) a = 2, b = 2, c = – 1 iii) a = 2, b = – 2, c = 1 iv) a = – 2, b = – 2, c = –1.

33. Resuelve la ecuación matricial $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ \mathbf{22} & \mathbf{14} \end{pmatrix}$**.**

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sustituyendo y operando, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4a+4c-b-d & -2a-2c \\ 12a+16b-3b-4d & -6a-8b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de las matrices se obtiene:

$$\begin{cases} 4a+4c-b-d=6 \\ -2a-2c=4 \\ 12a+16c-3b-4d=22 \\ -6a-8c=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-6 \\ c=-1 \\ d=-8 \end{cases}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$.

34. Determina la matriz X que verifica AXA – B = O, siendo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{O} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Si despejamos X de la ecuación matricial, obtenemos: $X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$.

La matriz inversa de la matriz A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

La matriz buscada es $X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

35. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, encuentra, en cada caso, la matriz X que cumple:

a) X · A + 2B = C **b) A · X – B = C** **c) A · X · B = C**

a) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: X = (C – 2B) · A^{-1}.

Operando con las matrices tenemos:

$$C - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: X = A^{-1} · (B + C).

Operando con las matrices tenemos:

$$B + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: X = A^{-1} · C · B^{-1}.

Operando con las matrices tenemos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

36. Si A es una matriz cuadrada de orden n, tal que A^2 = A, e I es l matriz unidad de orden n, ¿qué matriz es B^2, si B = 2A – I?

Se tiene que:

B^2 = B · B = (2A – I) · (2A – I) = 4A · A – 2A · I – I · 2A + I · I = $4A^2$ – 2A – 2A + I = 4A – 4A + I = I.

Por tanto, la matriz B^2 es la matriz unidad. Las matrices como B se denominan idempotentes.

37. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Demuestra que si A · B = A y B · A^{-1} = B, entonces A^2 = A.

b) Si A es una matriz que conmuta con B y C, ¿es cierto que (B · C) · A = A · (B · C)?

a) Se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$A^2 \underset{(1)}{=} A \cdot A \underset{(2)}{=} (A \cdot B) \cdot A \underset{(3)}{=} A \cdot (B \cdot A^{-1}) \cdot A \underset{(4)}{=} A \cdot B \cdot A^{-1} \cdot A \underset{(5)}{=} A \cdot B \underset{(6)}{=} A$$

y que:

1) Es la definición de potencia cuadrado de una matriz

2) Por la hipótesis A · B = A.

3) Por la hipótesis B · A^{-1} = B.

4) Por la propiedad asociativa del producto.

5) Al ser A · A^{-1} = I.

6) Por la hipótesis A · B = A.

b) Se cumple:

$$(B \cdot C) \cdot A \underset{(1)}{=} B \cdot (C \cdot A) \underset{(2)}{=} B \cdot (A \cdot C) \underset{(3)}{=} (B \cdot A) \cdot C \underset{(4)}{=} (A \cdot B) \cdot C \underset{(5)}{=} A \cdot (B \cdot C)$$

al ser:

(1); (3) y (5) Por la propiedad asociativa del producto de matrices.

(2) Las matrices A y C conmutan.

(4) Las matrices A y B conmutan.

38. Halla todas las matrices $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$ con a, b, c $\in$ R, que satisfacen la ecuación matricial X^2 = 2X.

Hallamos X^2: $X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$.

Se cumplirá:

$$X^2 = 2X \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2a \\ ab+bc = 2b \\ c^2 = 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0,\ a=2 \\ b=0, a+c=2 \\ c=0,\ c=2 \end{cases}$$

Combinando los valores de a, b y c obtenemos las soluciones:

i) Con a = 0, b = 0 y c = 0 se obtiene la matriz $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que obviamente cumple $X_1^2 = 2\ X_1$.

ii) Con a = 0, b $\in$ R y c = 2 se obtienen las matrices $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ que cumplen $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

iii) Con a = 2, b = 0 y c = 2 se obtiene la matriz $X_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ que cumple $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

iv) Con a = 2, b $\in$ R y c = 0 se obtienen las matrices $X_4 = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que cumplen $\begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

39. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **e** $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$,

a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que A^2 = aA + bI.

b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican (A – X) · (A + X) = $A^2 - X^2$.

a) Calculamos A^2: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Operando en la expresión A^2 = aA + bI e identificando los elementos de las matrices resultantes, obtenemos:

$$A^2 = aA + bI \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -3a \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ -3a=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

b) Operamos la expresión (A – X) · (A + X) = $A^2 - X^2$, simplificamos y obtenemos:

(A – X) · (A + X) = $A^2 - X^2$ $\Rightarrow$ A^2 + A · X – X · A – X^2 = $A^2 - X^2$ $\Rightarrow$ A · X – X · A = O $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A · X = X · A

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ que cumple A · X = X · A. Operamos y resolvemos el sistema resultante:

$$A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-3z & y-3t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -3x+y \\ z & -3z+t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-3z = x \\ y-3z = -3x+y \\ t = -3z+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ t = x \end{cases}$$

Las matrices X son todas de la siguiente forma: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ $con\ x,\ y \in R.$

40. Determina que relaciones han de existir entre a, b, c y d para que se verifique AM = MA siendo A y M las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

Operamos A · M = M · A e identificamos los elementos de las matrices resultantes:

$$A \cdot M = M \cdot A \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a+d \\ d & -c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -c = b \\ -d = -a+b \\ a+c = d \\ b+d = -c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -b \\ d = a+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d-c \\ b = -c \end{cases}$$

Las matrices M son todas de la siguiente forma: $M = \begin{pmatrix} d-c & -c \\ c & d \end{pmatrix}$ $con\ d, c \in R.$

41. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{x} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$. Determina un valor de x para el que A^2 = 6A. ¿Tiene A inversa en ese caso?

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+x & 6 \\ 6x & x+9 \end{pmatrix}.$$

Mediante la igualdad A^2 = 6A, obtenemos: $\begin{pmatrix} 9+x & 6 \\ 6x & x+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6x & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 9$

La matriz A queda: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. Esta matriz no tiene inversa pues su determinante es nulo.

42. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{x+1} \end{pmatrix}$, y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ y sea I_2 la matriz identidad de orden 2.

a) Calcula el valor de x para que A – I_2 = B^{-1}.

b) Calcula el valor de x para que A · B = I_2.

a) La matriz inversa de B es $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si A – I_2 = B^{-1}, entonces: $\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0.$

b) Si A · B = I_2, entonces: $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1.$

ACTIVIDADES página 36

43. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

Realizamos operaciones elementales en las filas de las matrices, obteniendo matrices equivalentes, es decir, con el mismo rango.

a) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$.

c) Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = 2.

d) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 5 & 15 & 23 & 18 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{pmatrix}$ = 3

44. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Escribe cuatro matrices de dimensión 2x4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

En ambos casos existen múltiples respuestas.

a) La matriz de dimensión 2x4,

– con rango 1 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

– con rango 2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

– con rango 3 o 4 no es posible construirlas.

a) Un ejemplo podría ser:

– con rango 1: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \\ 10 & -10 & 20 & -30 \end{pmatrix}$ – con rango 2: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$

– con rango 3: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ – con rango 4: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

45. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a.

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{a+2} & \mathbf{a-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \mathbf{2a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{10} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-a} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Las soluciones son:

a) Rango de $\begin{pmatrix} a+2 & a-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a+2 & a-2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a+6 \end{pmatrix}$

Si a = – 6 el rango es 1, y si a ≠ – 6 el rango es 2.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$

Si a ≠ 1 y a ≠ – 1 el rango es 3.

Si a = – 1 o a = 1 rango es 2.

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$

Si a ≠ – 2 y a ≠ 1 el rango es 3.

Si a = – 2 el rango es 2.

Si a = 1 el rango es 1.

d) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 5 & -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & 30+a & 51 & 3 \\ 0 & 11 & 20-a & 1 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & a+30 & 51 & 3 \\ 0 & 0 & a^2+10a-39 & 3-a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & a+30 & 51 & 3 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+13) & 3-a \end{pmatrix}$.

Si a ≠ 3 el rango es 3 y si a = 3 el rango es 2.

46. En un instituto hay alumnos de tres pueblos, A, B y C, distribuidos en cursos según la matriz M. Una empresa de transporte elabora dos rutas R_1 y R_2. Los kilómetros que recorría cada alumno se muestran en la matriz N. Si el precio por alumno y kilómetro de 12 euros, expresa en forma de matriz lo que se recaudaría por curso por cada itinerario.

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{P} & \mathbf{S} & \mathbf{T} & \mathbf{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{212} & \mathbf{190} & \mathbf{125} & \mathbf{98} \\ \mathbf{96} & \mathbf{75} & \mathbf{50} & \mathbf{12} \\ \mathbf{24} & \mathbf{26} & \mathbf{12} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array} \qquad \mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{24} & \mathbf{46} \\ \mathbf{9} & \mathbf{32} & \mathbf{20} \end{pmatrix} \end{array}$$

Los kilómetros recorridos por cada grupo de alumnos en cada una de las dos rutas, R_1 y R_2, es:

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 98 \\ 96 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5104 & 4516 & 2752 & 1440 \\ 5460 & 4630 & 2965 & 1426 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array}$$

La recaudación por curso en cada itinerario es:

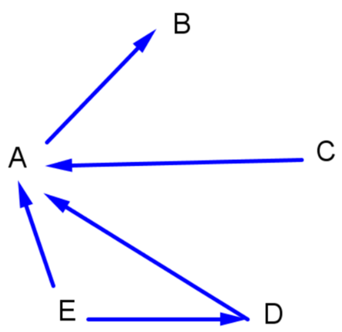
$$12 \cdot \begin{pmatrix} 5104 & 4516 & 2752 & 1440 \\ 5460 & 4630 & 2965 & 1426 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 61248 & 54192 & 33024 & 17280 \\ 65520 & 55560 & 35580 & 17112 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array}$$

47. Entre cinco personas hay la siguiente relación de influencias: A influye sobre B; E sobre D; C, D y E influyen sobre A. Se pide:

a) Construye la matriz de influencias: M.

b) Halla la matriz de influencias de dos etapas: M^2.

c) Interpreta la suma de las filas de M y de sus columnas.



Dibujamos el grafo con las relaciones de influencias que se describen en el enunciado.

a) Teniendo en cuenta que los individuos de las filas influyen sobre los individuos de las columnas, como puede verse en el grafo, la matriz de influencias es:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

b) La matriz de influencias en dos etapas es M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El significado de los elementos que valen 1 es:

- a_{32} = 1: C influye en B a través de A.
- a_{42} = 1: D influye en B a través de A.
- a_{51} = 1: E influye en A a través de D.
- a_{52} = 1: E influye en B a través de A.

c) La suma de las filas es 1, 0, 1, 1 y 2, respectivamente.

Estos valores significan:

Fila	**Suma de la fila**	**Significado**
Primera	1	A influye en una persona, B
Segunda	0	B no influye en nadie
Tercera	1	C influye en una persona A
Cuarta	1	D influye en una persona, A

Quinta	2	E influye en dos personas, A y D

La suma de las columnas es 3, 1, 0, 1, 0, respectivamente.

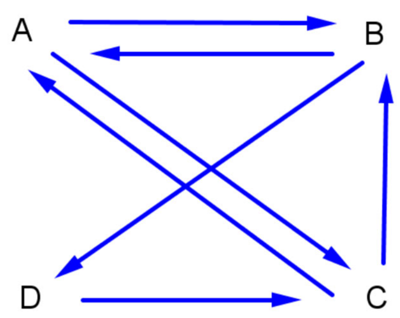
Estos valores significan:

Columna	Suma de la columna	Significado
Primera	3	A está influenciado por 3 personas, C, D y E
Segunda	1	B está influenciado por una persona, A
Tercera	0	C no está influenciado
Cuarta	1	D está influenciado por una persona, E
Quinta	0	E honesta influenciado

48. Dibuja el grafo de cuatro vértices, cuya matriz asociada es la matriz M. Supón que la matriz anterior determina los contagios directos de una determinada enfermedad. Halla, calculando M^2 y M^3, los contagios de segundo y tercer orden de los elementos del grupo.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Dibujamos el grafo:



Calculamos M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores de los elementos de esta matriz muestran los contagios indirectos de segundo orden. Así, por ejemplo:

a_{11} = 2 indica que A se contagia a sí mismo a través de B o C al existir los caminos A–B–A o A–C–A.

a_{12} = 1 indica que A contagia a B a través de un tercero al existir el camino A–C–B.

Calculamos M^3:

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores de los elementos de esta matriz muestran los contagios indirectos de tercer orden. Así, por ejemplo:

a_{12} = 2 indica que A contagia a B a través de otros dos individuos al existir los caminos A–C–A–B o A–B–A–B.

a_{32} = 2 indica que C contagia a B a través de otros dos individuos al existir los caminos C–A–C–B o C–B–A–B.

49. Unos investigadores médicos estudian la difusión de un virus en una población de 1000 cobayas de laboratorio. En cualquier semana, hay una probabilidad del 80% de que un cobaya infectado venza al virus y un 10% de que un cobaya no infectado quede infectado. Actualmente, hay 100 cobayas infectados por el virus. ¿Cuántos estarán infectados la próxima semana? ¿Y dentro de dos semanas? ¿Se estabilizará el número de cobayas infectados?

La matriz, P, de las probabilidades de transición es:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Infectado & No\ inf\,ectado \end{array} \\ \begin{array}{c} Infectado \\ No\ inf\,ectado \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

Estarán infectados la próxima semana:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = X_1$$

Estarán infectados dentro de dos semanas:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 889 \end{pmatrix} = X_2$$

De otra forma: $P^2 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 889 \end{pmatrix} = X_2$

Calculamos el valor estacionario: Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces:

$$P \cdot X_{est} = X_{est} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,20 & 0,10 \\ 0,80 & 0,90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,20x + 0,10y = x \\ 0,80x + 0,90y = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0,80x + 0,10y = 0 \\ 0,80x - 0,10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{y = 8x$$

Si x + y = 1000, entonces: $\begin{cases} x = 111 \\ y = 889 \end{cases}$.

50. Una residencia aloja a 200 estudiantes que estudian en una facultad de ciencias. Todos los que estudian matemáticas más de una hora un día las estudian menos de una hora al día siguiente. Una cuarta parte de los que estudian matemáticas menos de una hora un día las estudian más de una hora al día siguiente. La mitad de los estudiantes han estudiado matemáticas hoy más de una hora. ¿Cuántos las estudiaran más de una hora mañana? ¿Y pasado mañana? ¿Y al tercer día? ¿Cómo evolucionan el número de estudiantes de cada apartado con el paso del tiempo?

La matriz, P, de las probabilidades de transición es:

$$\begin{array}{c} \\ +1\ hora \\ -1\ hora \end{array} \begin{array}{c} +1\ hora \quad -1\ hora \\ \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ 1 & 0,75 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

Y la matriz de estado, representando la población actual en cada uno de los dos estados, es:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

La matriz del día siguiente es: $P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ 1 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 175 \end{pmatrix} = X_1$

La matriz del segundo día es: $P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ 1 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 156 \end{pmatrix} = X_2$

La matriz del tercer día es: $P \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ 1 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 44 \\ 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 161 \end{pmatrix} = X_3$

Calculamos el valor estacionario:

Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces:

$$P \cdot X_{est} = X_{est} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ 1 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,25y = x \\ x + 0,75x = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 0,25y = 0 \\ x - 0,25y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{y = 4x$$

Si x + y = 200, entonces: $\begin{cases} x = 40 \\ y = 160 \end{cases}$.

ACTIVIDADES ACCESO A LA UNIVERSIDAD página 37

1. Escribe la matriz cuadrada de orden 4 cuyos elementos son $\mathbf{a_{ij} = \begin{cases} 2i + j & si\ i \le j \\ -i + 2j & si\ i > j \end{cases}}$.

La matriz que cumple las condiciones anteriores es $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 9 & 10 \\ -2 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$

2. Considera las siguientes matrices $\mathbf{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ **y** $\mathbf{B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$**. Determina, si existen, los valores de a; b y c para los que las matrices A y B conmutan.**

Si las matrices conmutan se cumplirá A · B = B · A. Operando, obtenemos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si A · B = B · A, entonces a = 0, b = 0 y c = – 1.

3. Una factoría de muebles fabrica tres modelos de estanterías A, B y C, cada una de dos tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo A; 8000 grandes y 6000 pequeñas de tipo B, y 4000 grandes y 6000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos,

a) Representa esta información en dos matrices.

b) Halla una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos–tamaño de estantería.

a) Las matrices son:

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{Tamaños} \\ & & \begin{array}{cc} \textit{Grande} & \textit{Pequeño} \end{array} \\ \textit{Modelos} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Tornillos} & \textit{Soportes} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Grande} \\ \textit{Pequeño} \end{array} & \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) La matriz que representa la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos–tamaño de estantería es el resultado del producto que sigue:

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 & 8000 & 4000 \\ 8000 & 6000 & 6000 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 112\,000 & 200\,000 & 136\,000 \\ 38\,000 & 72\,000 & 48\,000 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \textit{Tornillos} \\ \textit{Soportes} \end{array} \end{array}$$

También se puede multiplicar la primera matriz del apartado a) por la segunda y obtenemos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & P \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix}$$

4. Halla las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b\,(a+d) \\ b\,(a+d) & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b\,(a+d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b\,(a+d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$

Los casos posibles son:

i) b = 0, entonces a = 0 o a = 1, y d = 0 o d = 1. Las matrices solución son: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) a = 1 – d, entonces $b = \pm\sqrt{d - d^2}$ con d $\in$ [0, 1]. Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 1 - d & \pm\sqrt{d - d^2} \\ \pm\sqrt{d - d^2} & d \end{pmatrix} \text{ con d} \in [0, 1].$$

5. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1+x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1-x} \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad. Encuentra los valores de x que verifican $\mathbf{A^2 = 2A + I}$.

Hallamos A^2: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+2x+2 & 2 \\ 2 & x^2-2x+2 \end{pmatrix}$

Determinamos 2A + I: $2A + I = \begin{pmatrix} 2+2x & 2 \\ 2 & 2-2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 & 2 \\ 2 & 3-2x \end{pmatrix}$

Igualando las matrices obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x^2+2x+2 & 2 \\ 2 & x^2-2x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 & 2 \\ 2 & 3-2x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x+2 = 2x+3 \\ x^2-2x+2 = -2x+3 \end{cases} \Rightarrow \{x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Los valores de x son x = – 1 y x = 1.

6. Halla todas las matrices triangulares superiores de orden 2 que verifican que su cuadrado es la matriz identidad.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ triangular superior que cumple $A^2 = I$. Operando e igualando los elementos de las matrices obtenemos:

$$A^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b(a+c) = 0 \\ c^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1,\ a = 1 \\ b = 0, a+c = 0 \\ c = -1,\ c = 1 \end{cases}$$

Combinando los valores de a, b y c obtenemos las soluciones:

i) Con a = – 1, b = 0 y c = 1 se obtiene la matriz $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Con a = – 1, b $\in \mathbb{R}$ y c = 1 se obtienen las matrices $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) Con a = 1, b = 0 y c = 1 se obtiene la matriz $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iv) Con a = 1, b $\in \mathbb{R}$ y c = – 1 se obtienen las matrices $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. En una población de 100 000 consumidores, 20 000 usan la marca A, 30 000 la marca B y 50 000 ninguna de ellas. En un mes, un usuario de A tiene una probabilidad del 20% de cambiar a la marca B, y 5% de pasar a no usar ninguna de ellas. Un usuario de B tiene una probabilidad del 15% de cambiar a la marca A y 10% de no usar ninguna de ambas. Uno de los que no usa ninguna de las dos marcas tiene una probabilidad del 10% de pasar a usar la marca A y un 10% de pasar a usar B. ¿Cuántos usuarios de cada clase habrá el mes próximo? ¿Y dentro de dos meses? ¿Se estabilizarán los valores de los consumidores de cada clase?

La matriz, P, que representa las probabilidades de transición dadas es:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ Ning. \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & Ning. \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

Y la matriz de estado, representando la población actual en cada uno de los tres estados, es:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \\ 50000 \end{pmatrix}$$

La matriz de estado del próximo mes:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \\ 50000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24500 \\ 31500 \\ 44000 \end{pmatrix} = X_1$$

La matriz de estado del segundo mes:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24500 \\ 31500 \\ 44000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27500 \\ 32925 \\ 39575 \end{pmatrix} = X_2$$

Hallamos el valor estacionario. Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Se cumplirá: $P \cdot X_{est} = X_{est}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}75x + 0{,}15y + 0{,}10z = x \\ 0{,}20x + 0{,}75y + 0{,}10z = y \\ 0{,}05x + 0{,}10y + 0{,}80z = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0{,}25x + 0{,}15y + 0{,}10z = 0 \\ 0{,}20x - 0{,}25y + 0{,}10z = 0 \\ 0{,}05x + 0{,}10y - 0{,}20z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0{,}25x + 0{,}15y = -0{,}10z \\ 0{,}20x - 0{,}25y = -0{,}10z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{16}{13}z \\ y = \dfrac{18}{13}z \end{cases}$$

Como x + y + z = 100 000, se tiene como solución:

$$X_{est} \cong \begin{pmatrix} 34\,040 \\ 38\,300 \\ 27\,660 \end{pmatrix}$$

8. Prueba que $A^2 - A - 2I = O$, siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

Calculamos $A^2 - A - 2I$ y obtenemos:

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la expresión $A^2 - A - 2I = 0$, operando se obtiene:

$$A^2 - A - 2I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A - I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A = I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = I$$

La matriz inversa se es $A^{-1} = \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right)$.

Por tanto, $A^{-1} = \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

9. Si A y B son dos matrices diagonales de orden 2, demuestra que A · B = B · A. Halla todas las matrices diagonales A tales que A · A = I.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$.

Los productos de ambas son:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ una matriz diagonal cualquiera. La condición A · A = I nos conduce al sistema:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 = 1 \\ a_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \pm 1 \\ a_2 = \pm 1 \end{cases}$$

Las matrices diagonales buscadas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Encuentra todas las matrices diagonales que conmutan con la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{2} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Sea la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Se cumplirá:

$$A \cdot D = D \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2x & -y \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -x \\ y & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = -2x \\ -y = -x \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \{x = y$$

Las matrices que cumplen la condición pedida son de la forma $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ con x ∈ R.

11. Halla todas las matrices de orden 2 de la forma $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{1} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$ que verifiquen A^2 = O, siendo O la matriz nula.

Desarrollamos la igualdad $A^2 = O$:

$$A^2 = O \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a^2 + b & ab + bd \\ a + d & b + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Identificando términos: $\begin{cases} a^2 + d = 0 \\ ab + bd = 0 \\ a + d = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -d \\ b + `d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -d^2 \end{cases}$

Las matrices pedidas son todas de la siguiente forma: $A = \begin{pmatrix} -d & -d^2 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ $con\ d \in R.$

12. Dadas la matriz identidad I de orden 2 y las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, halla las matrices X e Y que son soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{AX} + \mathbf{BY} = \mathbf{3I} \\ \mathbf{AX} - \mathbf{BY} = \mathbf{I} \end{cases}$$

Si sumamos las dos ecuaciones del sistema obtenemos 2AX = 4I, es decir, AX = 2I.

Despejamos la matriz X multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = 2 \cdot A^{-1} \cdot I \quad \Rightarrow \quad X = 2 \cdot A^{-1}$$

Hallamos A^{-1}:

det (A) = 1 $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad Adj\ (A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz X es $X = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Si restamos las dos ecuaciones del sistema obtenemos 2BY = 2I, es decir, BY = I.

Despejamos la matriz Y multiplicando por la izquierda por B^{-1}:

$$B^{-1} \cdot B \cdot Y = B^{-1} \cdot I \quad \Rightarrow \quad Y = B^{-1}$$

Hallamos B^{-1}:

det (B) = – 1 $\qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Adj\ (B^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz Y es $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

13. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, encuentra la matriz B que cumple A · B = A + B.

Primer procedimiento:

Operando en la ecuación matricial A · B = A + B, obtenemos:

$$A \cdot B = A + B \quad \Rightarrow \quad A \cdot B - B = A \quad \Rightarrow \quad (A - I) \cdot B = A \quad \Rightarrow \quad B = (A - I)^{-1} \cdot A$$

La matriz inversa de (A – I) es $(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz B es: $B = (A - I)^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Segundo procedimiento:

Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, como A · B = A + B, se cumplirá:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + c & 3b + d \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + a & b + 1 \\ c + 1 & d + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + c = 3 + a \\ a + 2c = c + 1 \\ 3b + d = b + 1 \\ b + 2d = d + 2 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

14. Halla la matriz X, que cumple AXA = I, siendo la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Resolviendo la ecuación matricial AXA = I, obtenemos: x = $(A^{-1})^2$.

La matriz inversa de A es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz buscada es $X = \left(A^{-1}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

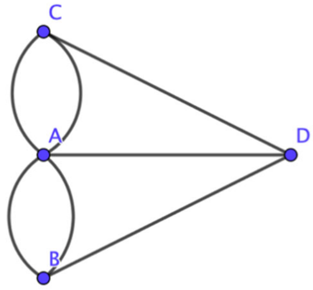
ACTIVIDADES PROYECTO página 38

Aquí mostramos algunas soluciones al proyecto planteado. Los apartados que no están resueltos es porque son específicos de cada grupo.

1. La palabra grafo procede del griego y significa trazar. Un grafo consta de un conjunto de puntos, llamados vértices, y un conjunto de líneas o aristas.

El origen de la teoría de grafos está en la situación–problema que había en el siglo XVIII en la antigua ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado) relativa a que el rio Pregel dividía la ciudad en cuatro regiones unidas a través de siete puentes. Euler se planteó la pregunta: ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, cruzando todos los puentes solo una vez cada uno y regresando al punto de partida?

Euler determinó que los puntos intermedios de un recorrido posible necesariamente han de estar conectados a un número par de líneas. Si llegamos a un punto desde alguna línea, entonces el único modo de salir de él es por una línea diferente. Esto quiere decir que tanto el punto inicial como el final deben ser los únicos conectados con un número impar de líneas. Pero como el problema dice que el punto inicial debe ser igual al final no podría existir ningún punto conectado con un número impar de líneas.



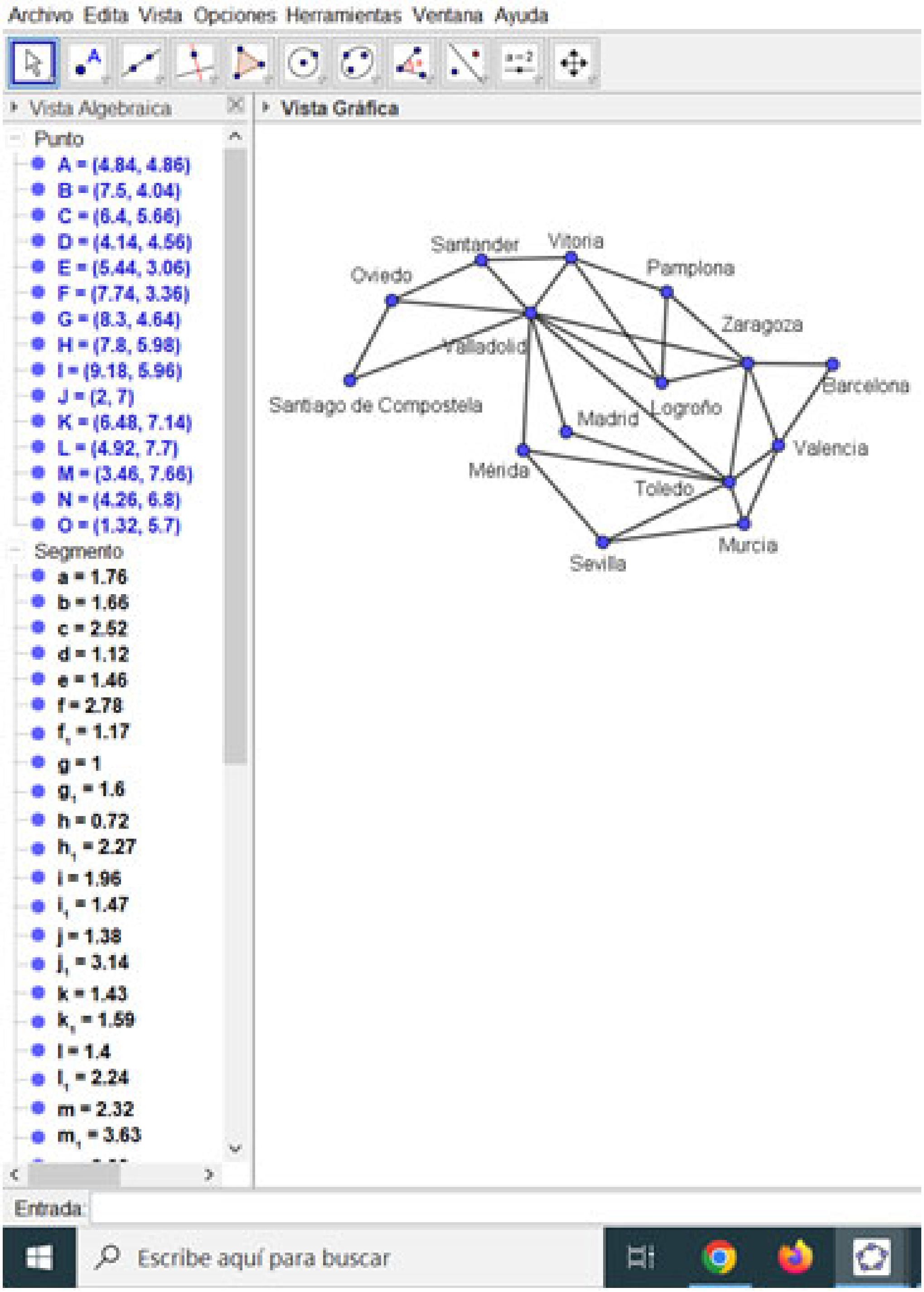
En el dibujo podemos ver un grafo relativo a los puentes de Königsberg, los vértices A y D son las islas y las aristas los puentes. Los cuatro vértices tienen un número impar de aristas, los vértices B, C y D tienen tres y el vértice A tiene cinco. Por tanto, el recorrido que se pide es imposible.

Investigad sobre si este grafo es euleriano. En la teoría de grafos, un **camino euleriano** es un camino que pasa por cada arista una y solo una vez. Un **circuito euleriano** es un camino euleriano cerrado. Un **grafo euleriano** es un grafo que admite un circuito euleriano. Un grafo euleriano es aquél que no tiene más de dos vértices impares.

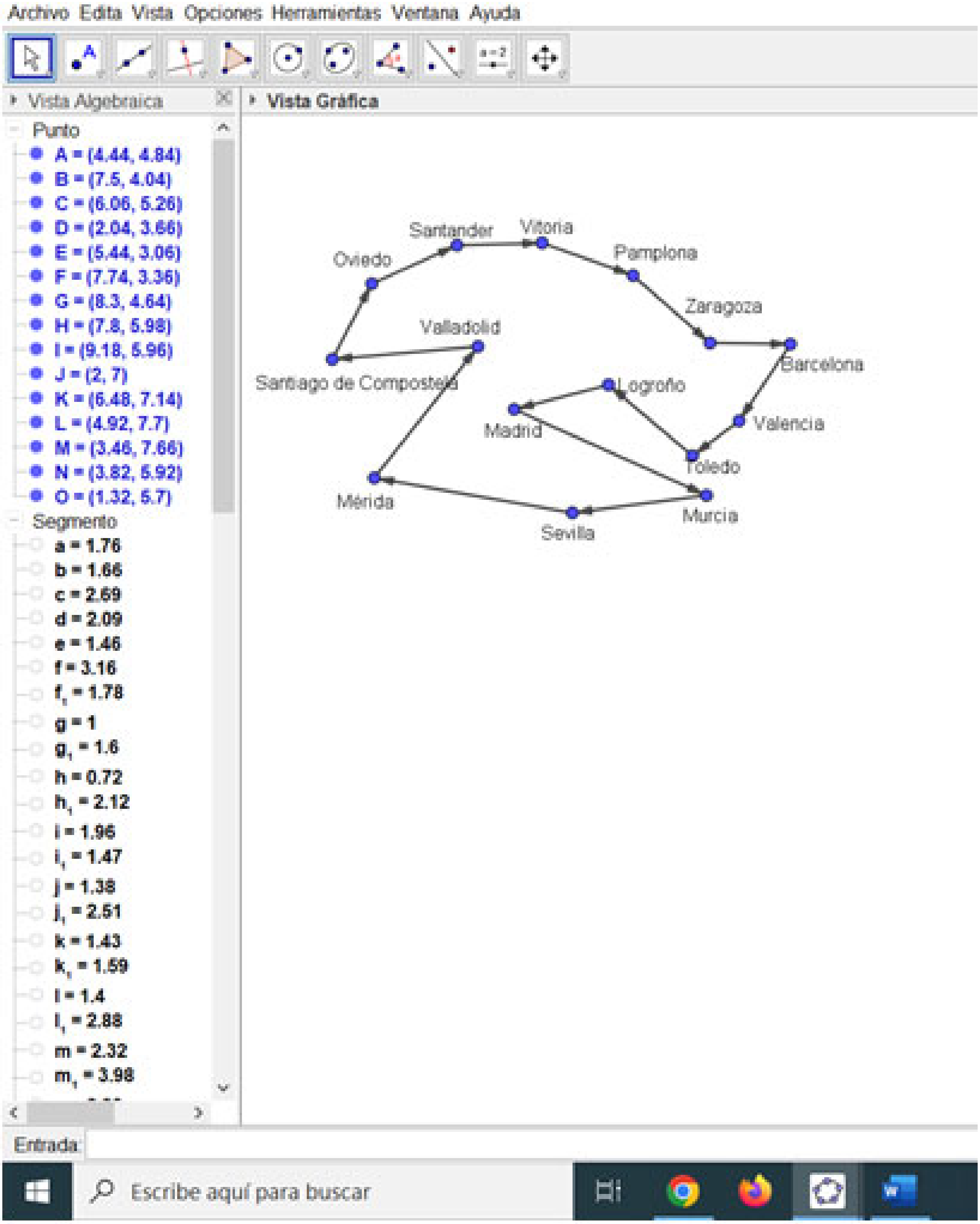
2. En este mapa de España peninsular en el que los puntos indican las capitales de cada comunidad autónoma, ¿podríais recorrer todas estas ciudades sin pasar por ninguna de ellas más de una vez?

Reducid el problema a un grafo. ¿De dónde habría que salir? Investigad si hay alguna desde la que se salga y, recorriendo todas las demás solo una vez, se regrese a la ciudad de partida.

En la imagen vemos un grafo con posibles soluciones:



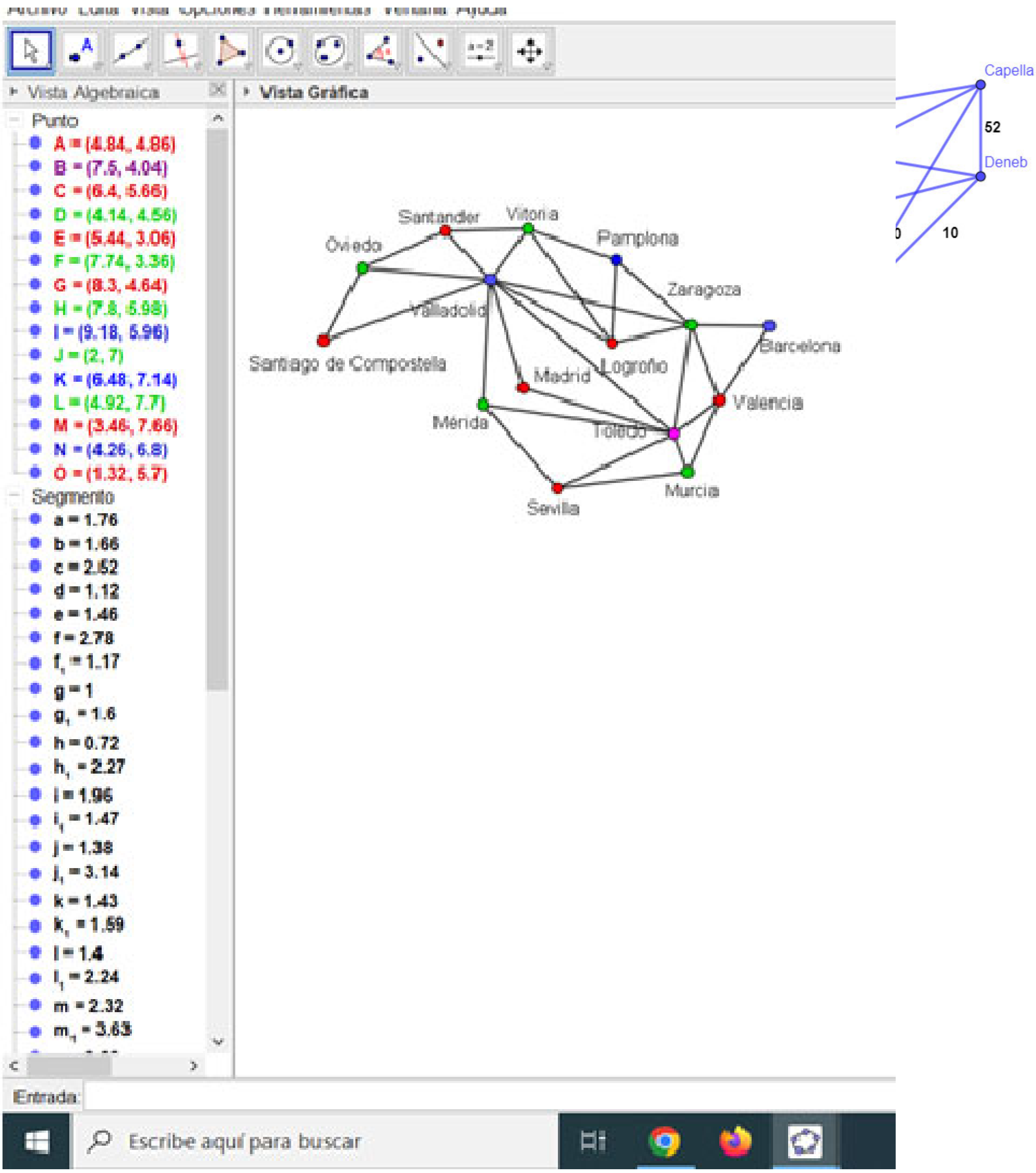
En la imagen vemos una posible solución saliendo de Valladolid y regresando a la misma ciudad:



3. El teorema de los cuatro colores dice:

Cualquier mapa geográfico con regiones continuas puede ser coloreado con, a lo sumo, cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones contiguas con el mismo color.

En la imagen tenemos una posible solución. Hemos necesitado 4 colores.



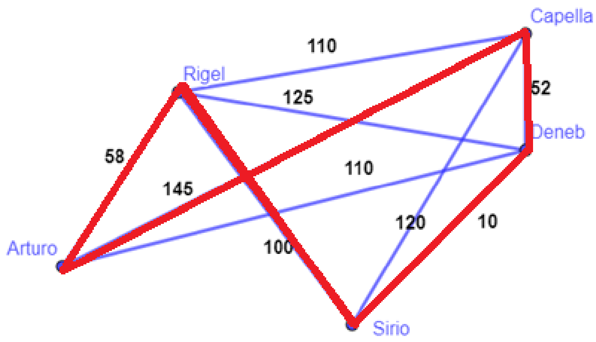
4. Individual

5. En el grafo de la imagen están indicadas las distancias, en kilómetros, entre las cinco paradas de un autobús interurbano.

Encontrad el camino de mínima distancia que debería hacer este autobús partiendo de la parada Arturo y volviendo a la misma pasando una sola vez por todas y cada una de las restantes paradas.

En él vemos que hay 4! = 24 caminos distintos partiendo de Arturo y llegando a Arturo, de los cuales la mitad son simétricos de la otra mitad.

Hacemos un diagrama de árbol con los 12 recorridos posibles. Ponemos la inicial de cada parada. Algunos recorridos son imposibles pues, por ejemplo, no hay autobús de S a A. Completando el diagrama vemos que el recorrido óptimo de distancia mínima que resuelve el problema es ARSDCA con 365 km.



En el grafo dado hemos señalado con línea más gruesa la solución buscada.

En total los recorridos son:

ARCDSA…………Imposible

ARDCSA…………Imposible

ARSCDA………440 km

ACRDSA……… Imposible

ACDRSA………Imposible

ADRCSA………Imposible

ARCSDA…………408 km

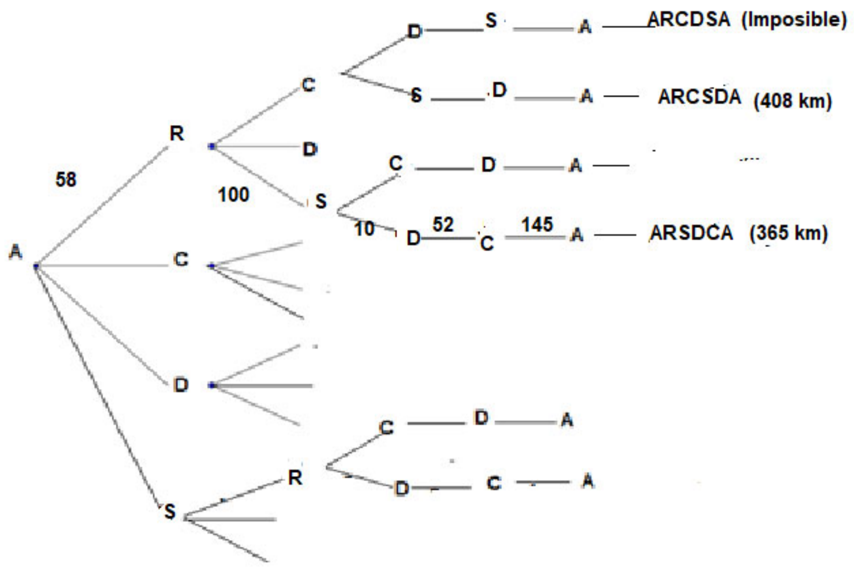
ARDSCA…………458 km

ARSDCA………365 km

ACRSDA………475 km

ACSRDA………600 km

ADCRSA………Imposible


ARCDSA (Imposible)
ARCSDA (408 km)
ARSDCA (365 km)
58
100
10
52
145
A
R
C
D
S